ALGÈBRE LINÉAIRE - MATH111(F)
Semestre d'automne — 2024-2025

Série 10: Représentations matricielles d'applications linéaires; valeurs et vecteurs propres

Objectifs de cette série

À la fin de cette série vous devriez être capable de

(O.1) continuer à **utiliser les matrices de passage** pour **calculer les coordonnées** d'un vecteur ;

(O.2) continuer à **utiliser les représentations matricielles** des applications linéaire relatives à des bases, ainsi que leur **lien avec les matrices de passage pour calculer des représentations relatives à des bases différentes** ;

(O.3) **calculer le polynôme caractéristique, les valeurs et les espaces propres** d'une matrice carrée.

Nouveau vocabulaire dans cette série

- valeur propre
- vecteur propre
- espace propre
- polynôme caractéristique

Noyau d'exercices

1.1 Changements de bases

Exercice 1 (Changements de bases non-canoniques I)
On considère les bases (ordonnées)

$$\mathscr{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_2} \right\} \text{ et } \mathscr{B}' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}'_2} \right\}$$

de $\mathbb{R}^2$.

(a) Donner la matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{B}$.

(b) Donner la matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$.

(c) Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ l'unique vecteur qui satisfait que

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}'}$.

(d) Soit $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ l'unique vecteur qui satisfait que

$$[\mathbf{w}]_{\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $[\mathbf{v}]_{\mathscr{B}}$.

Exercice 2 (Changements de bases non-canoniques II)
On considère deux bases (ordonnées)

$$\mathscr{B} = \{v_1, v_2\} \text{ et } \mathscr{B}' = \{v_1', v_2'\}$$

d'un espace vectoriel V telles que $v_1 = 6v_1' - 2v_2'$ et $v_2 = 9v_1' - 4v_2'$.

(a) Calculer la matrice de changement de $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$.

(b) Trouver $[v]_{\mathscr{B}'}$ pour $v = -3v_1 + 2v_2$ en utilisant l'item précédent.

1.2 Matrices d'applications linéaires

Exercice 3 (Matrices d'applications linéaires)

(a) Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, et soient

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \mathscr{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

les bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, respectivement.

(i) Calculer la représentation matricielle T relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

(ii) Donner la représentation matricielle T relative aux bases $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) Soit $T : \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ l'application linéaire donnée par

$$T(X) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} X$$

pour tout $X \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, et soit

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

une base (ordonnée) de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(i) Calculer la représentation matricielle de T relative à la base canonique

$$\mathscr{B}_{\text{can}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Donner la représentation matricielle de T relative à la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

1.3 Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 4 (Calcul de valeurs propres I)
Soit A une matrice carrée de taille 2 et soit

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer que le système $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ admet une solution non nulle si et seulement si la matrice $A - \lambda\, \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible.

(b) On suppose désormais que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A\mathbf{v}$.

(c) Trouver pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda\, \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible. En déduire que les deux valeurs trouvées ci-dessus sont des valeurs propres de A.

(d) Calculer les espaces propres correspondants aux deux valeurs propres.

Exercice 5 (Calcul de valeurs propres II)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 1 & -9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Est-ce que $\lambda = 6$ est une valeur propre de A ? Répondre sans calculer le polynôme caractéristique de A.

(b) Même question avec $\lambda = 1$ et $\lambda = -9$.

(c) Maintenant calculer le polynôme caractéristique de A et les valeurs propres de A.

Exercice 6 (Calcul de valeurs propres III)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Montrer que 0 et 6 sont des valeurs propres de A, et calculer les espaces propres associés.

Exercice 7 (Valeurs propres de l'inverse et la transposée)

(a) Montrer que si λ est une valeur propre d'une matrice carrée inversible A de taille n, alors λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1}. Trouver un vecteur propre correspondant.

(b) Montrer que A et A^{T} ont les mêmes valeurs propres. Montrer par un contre-exemple que les vecteurs propres de A et A^{T} ne sont pas les mêmes en général.

Pour compléter la pratique

2.1 Changements de bases

Exercice 8 (Changements de bases non-canoniques III)
On considère les bases (ordonnées)

$$\mathscr{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_2} \right\} \text{ et } \mathscr{B}' = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}'_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}'_2} \right\}$$

de $\mathbb{R}^2$.

(a) Déterminer la matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$.

(b) Calculer la matrice de changement de base (ou matrice de passage) de la base $\mathscr{B}'$ vers la base $\mathscr{B}$.

2.2 Matrices d'applications linéaires

Exercice 9 (QCM sur matrices d'applications linéaires, valeurs et vecteurs propres)
Résoudre les QCM dans les items suivants, où chaque QCM n'admet qu'une seule réponse correcte.

(a) Si A est une matrice carrée de taille 3 et $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A, alors

☐ λ^{-1} est une valeur propre de $-A$;

☐ λ est une valeur propre de $-A$;

☐ λ^{-1} est une valeur propre de A^{-1} ;

☐ λ est une valeur propre de A^{-1}.

(b) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

☐ admet l'unique valeur propre $\lambda = 6$;

- [ ] admet les valeurs propres $\lambda = -6$ et $\lambda = -4$;
- [ ] admet les valeurs propres $\lambda = 0$ et $\lambda = 6$;
- [ ] admet les valeurs propres $\lambda = -4$ et $\lambda = 6$.

(c) Si l'on pose

$$\mathscr{F} = \left\{1-t, 1+t, 1+t+t^2\right\} \subseteq \mathbb{P}_2 \text{ et } \mathscr{F}' = \left\{1, t-\frac{1}{2}, t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right\} \subseteq \mathbb{P}_2,$$

alors

- [ ] $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais $\mathscr{F}'$ ne l'est pas ;
- [ ] $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont deux bases de $\mathbb{P}_2$;
- [ ] $\mathscr{F}'$ est une base de $\mathbb{P}_2$, mais $\mathscr{F}$ ne l'est pas ;
- [ ] ni $\mathscr{F}$ ni $\mathscr{F}'$ ne sont des base de $\mathbb{P}_2$.

(d) Si l'on pose

$$\mathscr{F} = \left\{1-t, 1+t, 1+t+t^2\right\} \subseteq \mathbb{P}_2 \text{ et } \mathscr{F}' = \left\{1, t-\frac{1}{2}, t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\right\} \subseteq \mathbb{P}_2,$$

et

$$P_{\mathscr{F}' \leftarrow \mathscr{F}} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } P_{\mathscr{F} \leftarrow \mathscr{F}'} = \begin{pmatrix} p'_{1,1} & p'_{1,2} & p'_{1,3} \\ p'_{2,1} & p'_{2,2} & p'_{2,3} \\ p'_{3,1} & p'_{3,2} & p'_{3,3} \end{pmatrix}$$

les matrices de passage respectives, alors

- [ ] $p_{1,3} = p'_{2,3} = 0$;
- [ ] $p_{1,3} = 9/16$ et $p'_{2,3} = 3/2$;
- [ ] $p_{1,3} = -1$ et $p'_{2,3} = -3/4$;
- [ ] $p_{1,3} = 3/2$ et $p'_{2,3} = -9/8$.

(e) Si A est une matrice carrée non inversible de taille 2, alors

- [ ] 0 est une valeur propre de A ;
- [ ] A est la matrice nulle ;
- [ ] A n'a pas de valeur propre réelle ;
- [ ] tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est un vecteur propre de A.

2.3 Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 10 (Calcul de valeurs propres IV)
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

(a) Est-ce que $\lambda = 4$ est une valeur propre de A ? Si oui, trouver un vecteur propre pour cette valeur propre.

(b) Est-ce que

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est une vecteur propre de B ?

(c) Trouver une base de l'espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 3$ de la matrice C. Quelle est la dimension de cet espace propre ?

Exercice 11 (Calcul de valeurs propres V)
Calculer les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indication : Noter que 0 est une valeur propre de A, car le noyau de A est non trivial.

Exercice 12 (Valeur propre à partir d'une équation)
Soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

et $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} = \lambda.$$

Calculer

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et conclure que λ est une valeur propre de A.

Exercice 13 (Valeur propre d'une puissance)
Soit A une matrice carrée de taille n et soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que si λ est une valeur propre de A avec vecteur propre $\mathbf{v}$, alors λ^k est une valeur propre de

$$A^k = \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ facteurs}}$$

avec vecteur propre $\mathbf{v}$.